JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

10. travnja 2012.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Rezultati i uvid u kolokvije: **petak, 13. travnja 2012. u 13:30 sati**.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Napišite definiciju **potpune kubične splajn** interpolacije za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete **interpolacije** i **glatkoće** zadovoljava ova interpolacija?

(b) Ukratko komentirajte **egzistenciju** i **jedinstvenost** potpune kubične splajn interpolacije.

(c) Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo **uniformnu** konvergenciju potpune kubične splajn interpolacije prema funkciji f? Kojeg **reda** je konvergencija?

JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 2

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ -8 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizacije matrice A

(a) bez pivotiranja, tj. $A = LR$,

(b) korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

Izračunajte pivotni rast u ovim faktorizacijama i najveći omjer odgovarajućih elemenata u matricama: (a) $|L|\,|R|$ i $|A|$, odnosno, (b) $|L|\,|R|$ i $|PA|$. Čemu služe ove dvije veličine — pivotni rast i najveći omjer?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & -8 & 0 \\ 6 & -8 & 17 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ -29 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Zadane su tri točke a, b i c koje **ne moraju** nužno biti različite. Neka je f dovoljno glatka funkcija u tim točkama. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost polinoma p stupnja najviše 3 koji zadovoljava sljedeća četiri uvjeta interpolacije:

$$p(a) = f(a), \quad p''(a) = f''(a), \quad p''(b) = f''(b), \quad p(c) = f(c).$$

Ako postoji, izračunajte takav polinom p za podatke: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ i

$$f(a) = 2, \quad f''(a) = 1, \quad f''(b) = 0, \quad f(c) = 1.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Neka je p_3 kubični interpolacijski polinom za funkciju f u čvorovima x_0, x_1, x_2, x_3. Prvu derivaciju f' aproksimiramo prvom derivacijom p_3' interpolacijskog polinoma. Dodatno, pretpostavimo da su čvorovi ekvidistantni s korakom h.

(a) Nađite takvu aproksimaciju za $f'(x_2)$ i zapišite ju kao linearnu kombinaciju prvih **podijeljenih** razlika funkcije f u susjednim čvorovima mreže. Uputa: koristite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma.

(b) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin x$$

i mreža čvorova $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi/2$. Izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f'(x_2)$ i pripadnu pravu pogrešku.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

10. travnja 2012.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Rezultati i uvid u kolokvije: **petak, 13. travnja 2012. u 13:30 sati**.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Napišite definiciju **po dijelovima kubične Hermiteove** interpolacije za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete **interpolacije** i **glatkoće** zadovoljava ova interpolacija?

(b) Ukratko komentirajte je li po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija **lokalna** ili ne.

(c) Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo **uniformnu** konvergenciju po dijelovima kubične Hermiteove interpolacije prema funkciji f? Kojeg **reda** je konvergencija?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 8 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizacije matrice A

(a) bez pivotiranja, tj. $A = LR$,

(b) korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

Izračunajte pivotni rast u ovim faktorizacijama i najveći omjer odgovarajućih elemenata u matricama: (a) $|L|\,|R|$ i $|A|$, odnosno, (b) $|L|\,|R|$ i $|PA|$. Čemu služe ove dvije veličine — pivotni rast i najveći omjer?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 13 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 2 & -8 & 19 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ -45 \\ 32 \\ -39 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Zadane su tri točke a, b i c koje **ne moraju** nužno biti različite. Neka je f dovoljno glatka funkcija u tim točkama. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost polinoma p stupnja najviše 3 koji zadovoljava sljedeća četiri uvjeta interpolacije:

$$p(a) = f(a), \quad p''(a) = f''(a), \quad p'(b) = f'(b), \quad p(c) = f(c).$$

Ako postoji, izračunajte takav polinom p za podatke: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ i

$$f(a) = 1, \quad f''(a) = 2, \quad f'(b) = 1, \quad f(c) = 0.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Neka je p_3 kubični interpolacijski polinom za funkciju f u čvorovima x_0, x_1, x_2, x_3. Drugu derivaciju f'' aproksimiramo drugom derivacijom p_3'' interpolacijskog polinoma. Dodatno, pretpostavimo da su čvorovi ekvidistantni s korakom h.

(a) Nađite takvu aproksimaciju za $f''(x_1)$ i zapišite ju kao linearnu kombinaciju prvih **podijeljenih** razlika funkcije f u susjednim čvorovima mreže. Uputa: koristite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma.

(b) Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos x$$

i mreža čvorova $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi/2$. Izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f''(x_1)$ i pripadnu pravu pogrešku.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

10. travnja 2012.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Rezultati i uvid u kolokvije: **petak, 13. travnja 2012. u 13:30 sati**.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Napišite definiciju **linearne splajn** interpolacije za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete **interpolacije** i **glatkoće** zadovoljava ova interpolacija?

(b) Ukratko komentirajte je li linearna splajn interpolacija **lokalna** ili ne.

(c) Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo **uniformnu** konvergenciju linearne splajn interpolacije prema funkciji f? Kojeg **reda** je konvergencija?

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizacije matrice A

(a) bez pivotiranja, tj. $A = LR$,

(b) korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

Izračunajte pivotni rast u ovim faktorizacijama i najveći omjer odgovarajućih elemenata u matricama: (a) $|L|\,|R|$ i $|A|$, odnosno, (b) $|L|\,|R|$ i $|PA|$. Čemu služe ove dvije veličine — pivotni rast i najveći omjer?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 6 & 0 \\ -4 & 8 & -8 & 0 \\ 6 & -8 & 19 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -26 \\ 40 \\ -67 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Zadane su tri točke a, b i c koje **ne moraju** nužno biti različite. Neka je f dovoljno glatka funkcija u tim točkama. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost polinoma p stupnja najviše 3 koji zadovoljava sljedeća četiri uvjeta interpolacije:

$$p(a) = f(a), \quad p'(a) = f'(a), \quad p''(b) = f''(b), \quad p(c) = f(c).$$

Ako postoji, izračunajte takav polinom p za podatke: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ i

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 1, \quad f''(b) = 2, \quad f(c) = 1.$$

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Neka je p_3 kubični interpolacijski polinom za funkciju f u čvorovima x_0, x_1, x_2, x_3. Prvu derivaciju f' aproksimiramo prvom derivacijom p_3' interpolacijskog polinoma. Dodatno, pretpostavimo da su čvorovi ekvidistantni s korakom h.

(a) Nađite takvu aproksimaciju za $f'(x_1)$ i zapišite ju kao linearnu kombinaciju prvih **podijeljenih** razlika funkcije f u susjednim čvorovima mreže. Uputa: koristite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma.

(b) Zadana je funkcija

$$f(x) = \cos x$$

i mreža čvorova $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi/2$. Izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f'(x_1)$ i pripadnu pravu pogrešku.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

10. travnja 2012.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.
Rezultati i uvid u kolokvije: **petak, 13. travnja 2012. u 13:30 sati**.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Napišite definiciju **kubične splajn** interpolacije za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete **interpolacije** i **glatkoće** zadovoljava ova interpolacija?

(b) Ukratko komentirajte je li kubična splajn interpolacija **lokalna** ili ne.

(c) Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo **uniformnu** konvergenciju kubične splajn interpolacije prema funkciji f? Kojeg **reda** je konvergencija i o čemu to ovisi?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizacije matrice A

(a) bez pivotiranja, tj. $A = LR$,

(b) korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

Izračunajte pivotni rast u ovim faktorizacijama i najveći omjer odgovarajućih elemenata u matricama: (a) $|L|\,|R|$ i $|A|$, odnosno, (b) $|L|\,|R|$ i $|PA|$. Čemu služe ove dvije veličine — pivotni rast i najveći omjer?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 13 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 10 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & 14 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -16 \\ 50 \\ 46 \\ -58 \end{bmatrix}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Zadane su tri točke a, b i c koje **ne moraju** nužno biti različite. Neka je f dovoljno glatka funkcija u tim točkama. Nađite nužne i dovoljne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost polinoma p stupnja najviše 3 koji zadovoljava sljedeća četiri uvjeta interpolacije:

$$p(a) = f(a), \quad p'(a) = f'(a), \quad p'(b) = f'(b), \quad p(c) = f(c).$$

Ako postoji, izračunajte takav polinom p za podatke: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ i

$$f(a) = 1, \quad f'(a) = 0, \quad f'(b) = 1, \quad f(c) = 2.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

10. travnja 2012.

(10 bodova.) Neka je p_3 kubični interpolacijski polinom za funkciju f u čvorovima x_0, x_1, x_2, x_3. Drugu derivaciju f'' aproksimiramo drugom derivacijom p_3'' interpolacijskog polinoma. Dodatno, pretpostavimo da su čvorovi ekvidistantni s korakom h.

(a) Nađite takvu aproksimaciju za $f''(x_2)$ i zapišite ju kao linearnu kombinaciju prvih **podijeljenih** razlika funkcije f u susjednim čvorovima mreže. Uputa: koristite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma.

(b) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sin x$$

i mreža čvorova $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/3$, $x_3 = \pi/2$. Izračunajte (u decimalnim brojevima) opisanu aproksimaciju za $f''(x_2)$ i pripadnu pravu pogrešku.